ISSN 2223–5620 (Print), ISSN 2411–1554 (Online)
Електромагнітна сумісність та
безпека на залізничному транспорті, 2016, № 12

УДК 511.342.2

В. В. ЛАГУТА – к. т. н., доцент, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, vvlaguta@mail.ru

АЛГОРИТМЫ СТРУКТУРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ЭКСПЕРТОМ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

Введение

В прикладных задачах под структурой системы понимается фиксированная совокупность элементов и связей между ними. Наиболее часто структуру системы представляют в виде графа. В настоящее время при анализе структур используется статистический и кибернетический подход.

Синтез модели состоит из трех этапов: определение структуры, оценка параметров модели, адаптация параметров. Сложность модели определяется при этом числом алгебраических уравнений.

*Актуальность***.** В статье рассмотрен вопрос математического моделирования процессов (систем) на основе наблюдения его показателей и их взаимосвязи. Моделирование рассматривается как один из инструментов исследования структуры процесса, когда последний представляется некоторым количеством взаимосвязанных показателей $X = \{X_1, X_2, \dots X_L\}$.

Цель исследования. Целью исследования является разработка методов математического моделирования сложных процессов (систем) упрощающих задачу выбора предикторов для параметрической идентификации.

Обзор публикаций

В прикладных задачах под структурой системы понимается фиксированная совокупность элементов и связей между ними. Наиболее часто структуру системы представляют в виде графа.

Ивахненко А. Г. рассматривал задачу структурной идентификации в которой под структурой исследуемого объекта понималась система уравнений, отражающая взаимодействие между заданными входом и выходом [1]. Синтез модели состоит из трех этапов: определение структуры, оценка параметров модели, адаптация параметров. Сложность модели определяется при этом числом алгебраических уравнений. Основные проблемы, связанные с моделированием систем с помощью методов многомерного статистического анализа исследованы в работах [2–7].

В работах [8–12] рассматриваются задачи структурной и параметрической идентификации на основе отношения толерантности. В работах описаны разработанные основные алгоритмы решения задач структурной идентификации. Подход и алгоритмы, которые предложены в данных работах, позволяют использовать методы математического моделирования сложных систем в условиях структурной неопределенности. Если математическая модель рассматривается как модель управления, то предложенный подход позволяет определять параметры управления. Алгоритмы построения множества всех наборов независимых переменных на основе отношения толерантности могут использоваться также в кластерном анализе.

Льюнг отметил, что успех в решении прикладных задач зависит от надлежащего выбора структуры модели [3]. Общим вопросам определения структур моделей посвящены работы Мостеллера и Тьюки [4].

Основные проблемы, связанные с моделированием систем с помощью методов многомерного статистического анализа исследованы в работах [1–5].

Постановка задачи

Пусть информация об исследуемом процессе задается результатами пассивного эксперимента в виде матрицы наблюдений $X=\{X_1, X_2, \dots X_L\}$ как и в работе [10], их значения задаются результатами пассивного эксперимента в виде матрицы наблюдений

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1L} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{NL} \end{bmatrix},$$

где x_{ij} – значение показателя X_i в j-м опыте. Одним из возможных способов определения структуры процесса является восстановление взаимосвязей между переменными из множества показателей X .

Проблема моделирования состоит в структурной неопределенности процесса, когда взаимосвязи между его показателями (элементами системы) неизвестны. Моделирование методами регрессионного анализа предполагает задание наборов двух типов: наборов независимых показателей (переменных) – предикторов и показателей, рассчитываемых по модели – функциям. Выбор лучших, в некотором смысле, предикторов реализуется в процессе решения задачи параметрической идентификации и, как правило, приводит к большому перебору вариантов математических моделей описывающих процесс X , [13].

Определение 1. Непустое подмножество показателей $Y \in X$ множества X , характеризующих некоторое качество процесса, будем называть выходными показателями.

Статические процессы исследуются с помощью регрессионных методов благодаря простоте применения. Различают статическую задачу для процессов с одним выходным показателем и несколькими входными, а также статическую задачу для процессов с несколькими выходными показателями и несколькими входными. Процесс имеющий m входов и n выходов описывается системой линейных алгебраических уравнений n-го порядка, которая в матричной форме имеет вид

$$Y = AX ,$$

где Y – вектор выходных показателей, X – вектор входных показателей, A – матрица коэффициентов процесса, которые, как правило, необходимо в процедуре идентификации, [3, 14].

По сути, подмножество выходных показателей являются некоторыми функциями от подмножества аргументов – независимых показателей $M \in X$. Другими словами подмножество независимых показателей образует множество аргументов для выходных показателей. Теперь стоит задача о разбиении всего множества показателей изучаемого процесса на два подмножества: подмножества независимых показателей (аргументов) и подмножества выходных показателей процесса (показателей-функций).

Независимая (объясняющая) переменная, которая применяется для прогноза зависимой переменной в регрессионном анализе, также называется независимой или предикторной переменной или ковариатой.

Определение 2. Задачу разбиения множества показателей процесса $X=\{X_1, X_2, \dots X_L\}$ на два непересекающиеся непустых подмножества: подмножество независимых показателей M -предикторов и подмножество выходных показателей Y

$$M \neq \varnothing,\ M \in X ,\ Y \in X ,\ M \cup Y = X ,$$
$$M \cap Y = \varnothing ,$$

будем называть задачей определения структуры математической модели изучаемого процесса.

Исследование наличия связи между показателями

В статистическом анализе различают следующие виды связей между факторами:

– функциональные;
– стохастические;
– статистические.

Определение 3. Функциональная связь – связь между показателями процесса, при которой каждому значению одной величины соответствует строго определенное значение другой, то есть

$$Y = F\left(x_1, x_2, \ \ldots x_n\right).$$

Исследованием таких связей статистика не занимается.

Определение 4. Стохастическая связь соответствует ситуации, когда изменение значения одного показателя ведет к изменению закона распределения другого.

Для дискретного случая это означает, что каждому значению одного показателя соответствует набор значений другого, причем каждое значение имеет свою вероятность реализации (например, марковские цепи).

Определение 5. Статистическая связь означает, что значение одного показателя изменяется в среднем в зависимости от того, какие значения принимает другой. Очень часто статистическая связь рассматривается как функциональная зависимость со случайной ошибкой

$$Y = F\left(x_1, x_2, \ldots x_m\right) + \varepsilon,$$

где $Y = F\left(x_1, x_2, \ldots x_m\right)$ – функция, описывающая зависимость Y от совокупности независимых переменных $x_1, x_2, \ldots x_m$, а ε – некоторая случайная ошибка. Известно, что сумма константы и случайной величины является случайной величиной. В связи с этим значения Y, рассчитанные по указанной формуле, будут вследствие добавления случайной величины ε, также случайными величинами.

Для определения структуры моделируемого процесса необходим выбор метода проверки связи. Эти методы предназначены для проверки гипотез о наличии связей между переменными. Выбор метода зависит от шкал измерения и количества измеренных переменных. В данной статье взаимосвязь между показателями оценивается на основе корреляционного анализа показателей процесса.

Корреляционный анализ применяется в тех случаях, когда переменные измеряются с помощью шкал отношений, интервалов или порядка. Корреляционная связь представляет собой частный случай статистической связи

$$M\left(Y \middle| X = x\right) = \overline{y}\left(x\right),$$

то есть математическое ожидание переменной Y, при условии, что случайная величина X принимает значение x. При проведении корреляционного анализа исходят из следующих предпосылок:

– все наблюдения независимы;

– наблюдения имеют нормальный закон распределения.

Коэффициент корреляции отражает тесноту линейной связи между двумя выборками случайных величин. Поскольку мы имеем дело со случайными величинами, то одной величины коэффициента парной корреляции для вывода о статистической значимости связи недостаточно. Необходимо проверить значимо ли он отличается от нуля. Это можно сделать с помощью критерия Стьюдента. Фактически проверяется гипотеза о равенстве коэффициента корреляции нулю. Для этого рассчитывается критериальное значение, задавшись уровнем значимости

$$t_{\text{рас.}} = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad (1)$$

где r – значение коэффициента корреляции, а n – количество наблюдений.

Если расчетное значение $t_{\text{рас.}}$ больше табличного, взятого с $n-2$ степенями свободы, нулевая гипотеза отвергается. Это означает, что коэффициент корреляции значимо отличается от нуля (с выбранным уровнем значимости). Полуширина доверительного интервала для коэффициента корреляции определяется по формуле

$$\Delta = \frac{t_{n-2,\alpha}\left(1-r^2\right)}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

где r – значение коэффициента корреляции; $t_{n-2,\alpha}$ – табличное значение критерия Стьюдента взятого с $n-2$ степенями свободы для заданного уровня значимости α.

При использовании корреляционного анализа следует помнить, что коэффициент корреляции отражает тесноту только линейной связи. Поэтому в том случае, когда зависимости более сложные, чем линейные, коэффициент корреляции будет свидетельствовать об отсутствии связи. Для сложных зависимостей между переменными используются другие статистические методы, например регрессионный анализ.

Следует иметь в виду, что при наличии физической связи между переменными следствием является наличие и корреляционной связи. Однако, если выборка непрезентативная, коэффициент корреляции будет близок к нулю и незначим. Наличие статистической связи необязательно означает наличие физической.

Алгоритмы структурного моделирования

При определении множества аргументов модели число их может быть произвольным. Исследователь (эксперт) может указать любые аргументы из множества показателей X. Оставшиеся показатели качества не будут влиять на общее представление изучаемой системы. Однако выделение важнейших показателей, которые могут служить аргументами, представляет интерес при построении различных аналитических методов приближенного изучения исследуемой системы. Для выявления линейной зависимости между показателями, как уже оговаривалось, используются свойства коэффициента корреляции случайных величин.

Пусть для наблюдаемого в пассивном эксперименте процесса $X=\{X_1,X_2,\ldots X_L\}$ построена матрица корреляции $R=\left[r_{ij}\right]$, $i,j=\overline{1,L}$. Изучаемому процессу поставим в соответствие неориентированный граф $G(X,E)$ с множеством вершин-показателей X, множеством ребер E, определяемых матрицей смежности $Q=\left[q_{ij}\right]$, $i,j=\overline{1,L}$. Элементы матрицы смежности q_{ij} определим по следующему правилу. Если показатель X_i коррелирует с показателем X_j, то в графе $G(X,E)$ вершины X_i и X_j соединяются ребром, а элемент матрицы смежности q_{ij} равен

$$q_{ij}=\begin{cases}1, & q_{ij}>r_{\text{кр.}}\\ 0, & q_{ij}\le r_{\text{кр.}}, i,j=1,\ldots L\end{cases}, \qquad (3)$$

где $r_{\text{кр.}}=r_{\text{кр.}}(\alpha,\nu)$ – критическое значение коэффициента корреляции, взятое с соответствующим уровнем значимости α и числом степеней свободы ν и который может быть либо вычислен из выражения (1), либо найден в специальных статистических таблицах.

Далее необходимо решить следующие задачи

– разбить множество X на два непересекающихся непустых подмножества: M – подмножество предикторов и подмножество функций $Y=X\setminus M$;

– определить структуру математической модели для множества M и множества функций Y.

Определение 6. Структурой исследуемого процесса будем называть тройку (X,Q,M), $M\ne\varnothing$.

Предлагаются следующие алгоритмы разбиения множества показателей с целью определения структуры математической модели.

Алгоритм 1.

Исходные данные: матрица наблюдений показателей процесса в пассивном эксперименте X.

Шаг 1. Задаемся уровнем значимости α и вычисляем число степеней свободы ν. Вычисляем или определяем по специальным статистическим таблицам критическое значение коэффициента корреляции $r_{\text{кр.}}(\alpha, \nu)$.

Шаг 2. Рассчитываем матрицу корреляции $R = [r_{ij}]$, для наблюдаемых показателей X_i, X_j, $i, j = \overline{1, L}$.

Шаг 3. Строим матрицу смежности $Q = [q_{ij}]$, $i, j = \overline{1, L}$ в соответствии с (3) и по данной матрице строим граф $G(X, E)$.

Шаг 4. Полагаем $M = \varnothing$ – множество показателей-предикторов и $Y = \varnothing$ – множество показателей-функций.

Шаг 5. По решению эксперта показатель X_i берется в качестве функции (зависимого показателя).

Шаг 6. Строим множество I_i – множество индексов вершин смежных к вершине X_i.

Шаг 7. Если множество I_i не пусто, тогда вершины $\{X_k\}$, $k \in I_i$, инцидентные ребрам ведущим к вершине X_i, добавляются в множество M.

Шаг 8. Вершину X_i добавляем во множество Y.

Шаг 9. Из графа $G(X, E)$ удаляем вершину X_i и вершины $\{X_k\}$, $k \in I_i$

$$G(X, E) = G(X, E) \setminus X_i \setminus \{X_k\}_{k \in I_i}.$$

Шаг 10. Если $G(X, E) \neq \varnothing$, то повторяем с Шага 5.

Шаг 11. Если множество $M = \varnothing$, то структуру процесса по заданному алгоритму определить нельзя. Алгоритм закончен. Все показатели являются независимыми случайными величинами с выбранной доверительной вероятностью.

Шаг 12. Если множество $M \neq \varnothing$, то проверяем условие $M \cup Y = X$. Если данное условие выполнено – алгоритм закончен.

По окончанию алгоритма во множестве M будет содержаться список независимых показателей $M = \{X_l\}$, $l \in I_M$, I_M – список индексов предикторных показателей, а множество Y будет содержать список выбранных экспертом выходных (зависимых) показателей $Y = \{X_i\}$, $i \in I_Y$, I_Y – список индексов зависимых показателей (функций).

В соответствии с предложенным выше алгоритмом строится лишь один набор предикторных переменных в отличие от метода изложенного в работах [10-12], где может быть получено несколько таких наборов.

Пусть множество предикторных переменных составляют показатели $M = \{X_1, X_2, \ldots X_m\}$, множество функций образуется показателями

$$Y = \{Y_{m+1} = X_{m+1}, Y_{m+2} = X_{m+2}, \ldots Y_L = X_L\}.$$

Математическую модель теперь можно записать в виде

$$\begin{cases} Y_{m+1} = X_{m+1} = f_{m+1}(X_1, X_2, ..., X_m) \\ Y_{m+2} = X_{m+2} = f_{m+2}(X_1, X_2, ..., X_m) \\ \ldots \\ Y_L = X_L = f_L(X_1, X_2, ..., X_m) \end{cases}. \quad (4)$$

Вид функций в правой части в общем случае выбирается неоднозначно, но в нашем случае правые части представленной модели рассматриваются как многомерные уравнения линейной регрессии (поскольку связи между показателями определены как линейные).

Представленный выше алгоритм 1 в практических целях задать можно и несколько иначе, работая не с построенным графом, а только с матрицей смежности.

Алгоритм 1М (оперирование с матрицей смежности).

Шаг 1–3 остается без изменений.

Шаг 5. По решению эксперта, если показатель X_i берется в качестве функции (зависимого показателя), отмечаем i-ю строку матрицы смежности как «функция», строку помечаем, например, специальным символом (+). Показатель X_i присоединяем к множеству зависимых показателей (функций) Y.

Шаг 6. Просматриваем выбранную i-ю строку матрицы смежности. Обнаружив элемент $q_{ij}=1$, столбец j и строку j отмечаем как «предикторная переменная», указанную строку и столбец помечаем специальным символом (*). Показатель X_j присоединяем к множеству независимых показателей M. Если в строке имеются несколько таких элементов, то помечаем соответствующие строки и столбцы символом (*).

Шаг 7. Если в матрице смежности имеются неотмеченные строки, то повторяем описанную процедуру в шаге 6 с той строкой, соответствующий показатель которой, по каким-то субъективным причинам, эксперт выбрал в качестве зависимого показателя.

Шаг 8. Если в матрице смежности более не осталось неотмеченных специальными символами строк, тогда строки отмеченные символом (*) образуют множество предикторных переменных M, а строки отмеченные символом (+) – множество зависимых показателей Y.

Симметричность матрицы смежности позволяет ограничится рассмотрением треугольной матрицы (ниже главной диагонали или выше).

Следующий представляемый алгоритм учитывает компоненты связности построенного графа $G(X,E)$.

Пусть исследуемому процессу соответствует граф $G(X,E)$ с множеством вершин X и множеством ребер E, определяемых матрицей смежности $Q=\left[q_{ij}\right]$, $i,j=\overline{1,L}$. Граф определяется, как и в случае алгоритма 1. Заметим, что граф $G(X,E)$ может образовываться его компонентами связности $G_1, G_2, \ldots G_p$

$$G(X,E)=G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_p \ .$$

Эта возможность соответствует тому, что процесс X может рассматриваться как p независимых подпроцессов, которые могут анализироваться отдельно друг от друга.

Независимость показателей означает, что изменение одного показателя непосредственно не влияет на изменение другого. На графе такая ситуация означает, что соответствующие независимым показателям вершины не соединяются ребром, при этом косвенное влияние не исключается.

Определение 7. Вершины графа X_i, X_j будем называть независимыми, если они не смежны друг другу.

Независимые вершины не инцидентны одному и тому же ребру, т.е. непосредственно не соединяются друг с другом. В основе следующего алгоритма лежит понятие компоненты связности неориентированного графа.

Алгоритм 2.

Исходные данные: матрица наблюдений показателей процесса в пассивном эксперименте X.

Шаг 1. Задаемся уровнем значимости α и вычисляем число степеней свободы ν. Вычисляем или определяем по специальным статистическим таблицам критическое значение коэффициента корреляции $r_{\text{кр.}}(\alpha,\nu)$.

Шаг 2. Рассчитываем матрицу корреляции $R=\left[r_{ij}\right]$, для наблюдаемых показателей X_i, X_j, $i,j=\overline{1,L}$.

Шаг 3. Строим матрицу смежности $Q=\left[q_{ij}\right]$, $i,j=\overline{1,L}$ и по данной матрице строим граф $G(X,E)$.

Шаг 4. Выделяем компоненты связности графа $G(X,E)$: $G_1, G_2, \ldots G_p$.

Шаг 5. Положить $k=1$.

Шаг 6. Для компоненты связности G_k применим алгоритм 1. Получим набор предикторных переменных M_k и множество показателей-функций Y_k.

Шаг 7. Для каждой функции из Y_k эксперт определяет множество независимых переменных $\tilde{M}_k \subset M_k$. Множество $\tilde{M}_k$ формируется только из независимых вершин компоненты связности (подграфа) G_k и только тех, которые непосредственно связаны ребром с рассматриваемой вершиной из множества показателей-функций.

Шаг 8. Положить $k = k + 1$.

Шаг 9. Если $k \le p$, возвращаемся к шагу 6.

В результате следования алгоритма 2 для каждой компоненты связности получим наборы предикторных переменных $\tilde{M}_k$, $k = \overline{1, p}$. Модели вида (4) строятся для всех $\tilde{M}_k$, $k = \overline{1, p}$.

Замечания. Множество предикторных переменных по предложенным алгоритмам единственным образом не строится. Содержимое множеств M и $\tilde{M}_k$ зависит от решений принимаемых экспертом.

При выборе множества показателей-функций Y и построения множества независимых показателей следует исходить, прежде всего, из инженерного смысла последних и их реальной физической взаимосвязи.

Набор независимых показателей для каждой рассматриваемой функции может отличаться, но может быть и полным, т.е. таким, каково есть множество предикторов M или $\tilde{M}_k$.

При определении коэффициентов модели необходимо наблюдаемые показатели центрировать и нормировать, чтобы избежать чрезмерного влияния отдельных показателей на значения, принимаемые моделью [15].

При применении предложенных алгоритмов необходимо в уравнениях модели исследовать определяемые коэффициенты на значимость. Процедура проверки на значимость может служить инструментом для уточнения набора независимых переменных в уравнениях модели на основе множества предикторных показателей M или $\tilde{M}_k$.

Применение структурного моделирования к задачам с векторным критерием качества

Описывать суть происходящего процесса с помощью одного показателя обычно затруднительно. Объективней процесс представляется не одним показателем, а несколькими. Возникает вопрос о предпочтении выбора критериальных показателей среди всего множества возможных показателей.

На практике при исследовании того или иного процесса (в том числе и сложных систем) обычно стараются добиваться не одной, а нескольких целей. Характеристики процесса определяются многими критериями, причем существенными и несравнимыми. Потому, исследование процесса или системы, определение их структуры составных компонент по своей сути является многокритериальной задачей, т. е. задачей, которая решается с учетом всей совокупности необходимых критериев, характеризующих процесс с различных сторон. Решение такой задачи осуществляется методами векторной оптимизации, [16].

Выделение важнейших критериев (показателей качества) представляет интерес при построении различных аналитических методов исследования математических моделей процессов. Особенностью изложенного выше метода определения структуры объектов исследования является возможность принимать обоснованные решения при выборе критериев оптимизации. В предложенном методе выбора критериальных показателей число критериев может быть произвольным.

Векторный критерий вносит в задачу неопределенность специального вида – выбор критерия оптимальности. Существуют различные способы преодоления этой неопределенности, которые и составляют содержание многочисленных методов решения задач векторной оптимизации. Они направлены на изыскание путей отыскания дополнительной информации, позволяющей заменить векторный критерий его скалярным эквивалентом.

Рассмотрим случай, когда вводимый показатель качества задается многомерным уравнением регрессии и является таким, что его предельная наилучшая величина должна соответствовать наименьшему значению. Пусть выбранные критерии оптимальности есть неотрицательные величины. Тогда при определении структуры модели в пространстве критериев

$$\min \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_k \end{bmatrix},$$

где Y_i, $i = \overline{1,k}$ многомерные линейные функции, необходимо учитывать только положительные коэффициенты корреляции между показателями процесса в отношении предпочтения $r_{ij} \ge r_{\text{кр.}}$. Этот результат вытекает из неограниченности функции Y_i снизу вследствие отрицательности коэффициента корреляции.

Покажем, что данное утверждение имеет место. Для показателей X_i, X_j, коэффициент корреляции между которыми равен единице, справедливо

$$\mu X_i = a_1 \mu X_j + a_0 ,$$

где μ – оператор математического ожидания. Если для X_i и X_j $r_{ij} \ge r_{\text{кр.}}$, то считаем, что между показателями X_i и X_j существует линейная зависимость и критерий качества ограничен снизу при положительности аргументов в векторе критериев. Вариант $r_{ij} < -r_{\text{кр.}}$ не приемлем, поскольку это означает, что в векторе критериев, которые необходимо минимизировать имеются элементы и $-X_i$, и X_i. Наличие $-X_i$ означает существование зависимости

$$X_i = -|a_1| X_j + a_0,\ r_{ij} < 0 .$$

Последнее указывает на неограниченность снизу критерия качества относительно данного показателя-аргумента.

Это положение остается справедливым и в отношении тех показателей, которые в связи с инженерными или иными требованиями должны быть положительны.

Выводы

Уточнено отношение предпочтения в задаче определения структуры математической модели с использованием корреляционного и регрессионного анализа при требовании положительности показателей.

Разработаны алгоритмы формирования предикторных показателей с экспертом.

Библиографический список

1. Ивахненко, А. Г. Самоорганизация прогнозирующих моделей / А. Г. Ивахненко, Й. А. Мюллер. – К.: Техніка, 1985. – 224 с.
2. Дубровский, С. А. Прикладной многомерный статистический анализ / С. А. Дубровский. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 216 с.
3. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.
4. Мостеллер, Ф. Анализ данных и регрессия / Ф. Мостеллер, Дж. Тьюки. – М.: Финансы и статистика, 1982. Вып. 2. – 239 с.
5. Dougherty, C. Introduction to econometrics / C. Dougherty / C. Dougherty. – New York Oxford : Oxford University Press, 1992.
6. Green, W. H. Econometric analysis / W. H. Green. – New York : Macmillian Publishing Company, 1993.
7. Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа / – М.: Наука, 1980. – 470 с.
8. Мухіна, Н. А. Структурне моделювання за експериментальними даними з використанням відношення толерантності: Авторефе-

рат дис…. канд. ф.-м. наук. / Н. А. Мухіна. – Д. –1999. – 17 с.
9. Мухина, Н. А. Структурное моделирование по экспериментальным данным: дисс…. канд. ф.-м. наук. / Н. А. Мухина – ДГУ. – Д., – 1999.
10. Босов, А. А. Основные задачи моделирования по экспериментальным данным / А. А. Босов, Н. А. Мухина // Питання прикладної математики та математичного моделювання: Зб. наук. праць ДДУ. – Д., 1999. – С. 7–12.
11. Босов, А. А. Підвищення ефективної роботи транспортної системи на основі структурного аналізу / А. А. Босов, Н. А. Мухіна, Б. П. Піх // – Д.: Видавництво Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2005. – 200 с.
12. Босов, А. А. Про вибір предикторів в математичному моделюванні / А. А. Босов, Н. А. Мухіна // Вісник ВПІ. – Вінниця, 1999, № 4. С. 90–93.
13. Волгин, Л. Н. Принцип согласованного оптимума / Л. Н. Волгин. – М.: Советское радио, 1977. – 144 с.
14. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, – 1979. – 296 с.
15. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. 2-е изд., перераб. и доп. / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Финансы и статистика, 1987. – 369 с.
16. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2007. – 256 с.

Ключові слова: математична модель, структурна ідентифікація, кореляційний зв'язок, предикторні показники, векторний критерій якості.

Ключевые слова: математическая модель, структурная идентификация, корреляционная связь, предикторные показатели, векторный критерий качества.

Keywords: mathematical model, structural identification, correlation, the predictor performance, vector quality criterion.

Рецензенты:
д. т. н., проф., А. А. Босов,
д. ф.-м. н., проф., В. И. Гаврилюк.

Поступила в редколлегию 12.09.2016.
Принята к печати 20.09.2016.