

// Железные дороги мира. - 1997. - № 11. - С. 8-12.

**Ключові слова:** математичний опис, тягова мережа, автономний інвертор напруги, асинхронний тяговий привід, гармонійні складові перетворювача.

**Ключевые слова:** математическое описание, тяговая сеть, автономный инвертор напряжения, асинхронный тяговый привод,

гармонические составляющие преобразователя.

**Key words:** mathematical description, traction network, voltage autonomous inverter, asynchronous propulsion drive, harmonic components of converter.

Поступила в редколлегию 24.11.2010.

Принята к печати 26.11.2010.

УДК 621.331 : 621.332

ЗАВГОРОДНИЙ А. В. – главный инженер (Приднепровская железная дорога)

ГАВРИЛЮК В. И. – д.ф.-м.н., профессор (ДНУЖТ)

## МЕТОДЫ РАСЧЕТА ИМПЕДАНСА ЛИНИЙ ЭЛЕКТРИФИЦИРОВАННЫХ ЖЕЛЕЗНЫХ ДОРОГ

### Постановка задачи

При проектировании систем сигнализации, связи, тягового электроснабжения на электрифицированных железных дорогах необходимы численные значения импеданса рельсовых линий, линий контактной сети, продольного электроснабжения, проводной связи, а также других линий, расположенных на опорах контактной сети или на отдельно стоящих опорах вблизи железнодорожного пути. Сведения о частотной зависимости собственной и взаимной индуктивности таких линий необходимы также для обеспечения их электромагнитной совместимости.

Целью работы является анализ методов расчета импеданса линий электрифицированных железных дорог. Импеданс электрических линий зависит от их взаимного расположения, расстояния до земли, а также проводимости, диэлектрической и магнитной проницаемости земли.

Выражения для расчета импеданса проводников, расположенных над поверхностью земли, получены впервые Карсоном [1]

и, независимо от него, Полачеком [2] при следующих предположениях:

- земля однородна;
- диэлектрическая и магнитная проницаемости земли и воздуха одинаковы;
- токи смещения в земле пренебрежимо малы;
- параллельный адмитанс между проводниками и землей не влияет на проводимость земли.

Решение получено для квази-ТЕМ мод электромагнитного поля (т.е. в предположении, что электромагнитное поле имеет только продольные моды). Импеданс проводников выражен через несобственные интегралы, для приближенного вычисления которых предложены формулы, аппроксимирующие интегралы в виде бесконечных рядов.

В [3,4] задача решена в более общем виде, что позволило снять ограничения, связанные с предположением о равенстве диэлектрических и магнитных проницаемостей земли и воздуха. В [5] обобщены результаты предшествующих работ и предложена общая формула, известна как формула

Вайса-Занде. В [6] получены формулы для импеданса проводников, расположенных над поверхностью земли, в широком диапазоне частот (выше 106 Гц). В [7,8] предложены формулы для расчета собственного и взаимного импеданса проводников, основанные на предположении, что индуцированный в земле переменный ток сосредоточен в поверхностном слое, толщина которого условно представлена как комплексная величина, что позволило учесть активную и реактивную составляющие импеданса.

В практике инженерных расчетов собственного и взаимного импеданса проводников наибольшее распространение получили формулы, полученные в [1,2]. В [9, 10] отмечено невысокая точность расчетов по этих формулам, особенно при увеличении частоты тока и проводимости земли.

Использование на железнодорожном транспорте новых типов рельсовых цепей тональной частоты (до ~6 кГц), электрического подвижного состава с импульсным регулированием, микропроцессорных систем управления движением поездов, сделало еще более актуальной задачу нахождения импеданса линий электрифицированных железных дорог в диапазоне частот до 105 Гц.

Особенностью расчета частотной зависимости импеданса рельсовой линии и их взаимной индукции с другими линиями является близкое расположение рельсовых нитей к поверхности земли и наличие распределенной по их длине гальванической связи с землей.

Несмотря на практическую значимость рассматриваемой задачи, в литературе приведены результаты экспериментальных измерений импеданса рельсовых линий для небольшого количества частот (главным образом для промышленной и близкой к ней частоте). В ряде публикаций не приведена проводимость земли, что затрудняет использование экспериментальных данных.

Целью работы является проведение сравнительного анализа результатов расчета собственного и взаимного импеданса рельсовых нитей, а также рельсовой линии и контактного провода в диапазоне частот до

105 Гц по основным формулам, приведенным в литературе [1-10].

Вследствие недостаточного количества экспериментальных данных, в работе приведены также предварительные результаты измерений импеданса линий при повышенных частотах.

### Краткие теоретические сведения

Собственный импеданс линии включает три компонента [1-4]:

$$\underline{Z}_{ii} = \underline{Z}_I + \underline{Z}_E + \underline{Z}_{Gii}, \quad (1)$$

где  $\underline{Z}_I$ ,  $\underline{Z}_E$  – соответственно, внутренний и внешний импеданс линии,  $\underline{Z}_{Gii}$  – импеданс, вносимый электрическим влиянием земли. Внешний импеданс  $\underline{Z}_E$  определяется как импеданс контура, образованного проводником и землей, в предположении, что земля является совершенным проводником (с бесконечно большой проводимостью)

$$\underline{Z}_E = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i}, \quad (2)$$

где  $h_i$  – высота проводника  $i$  над поверхностью земли,  $r_i$  – радиус проводника,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $\omega$  – круговая частота.

Взаимный импеданс двух проводников  $i$  и  $j$ , параллельных поверхности земли, определяется выражением

$$\underline{Z}_m = j\omega L_{ij} + \underline{Z}_{Gij}, \quad (3)$$

где  $L_{ij}$  – взаимная индуктивность между двумя проводниками в предположении, что земля имеет бесконечно большую проводимость;  $\underline{Z}_{Gij}$  – импеданс, вносимый электрическим влиянием земли. Поскольку выражения для импеданса проводников без учета влияния земли хорошо известны из физики, ограничимся рассмотрением импеданса линий, вносимого присутствием земли.

Собственный и взаимный импеданс линий  $\underline{Z}_{Gii}$  и  $\underline{Z}_{Gij}$ , учитывающий влияние земли, определяется выражениями

$$\underline{Z}_{Gii} = R_{Gii} + jX_{Gii} = \omega \frac{\mu}{\pi} \underline{J}_s, \quad (4)$$

$$\underline{Z}_{Gij} = R_{Gij} + jX_{Gij} = \omega \frac{\mu}{\pi} \underline{J}_m, \quad (5)$$

в которых корректирующие члены  $\underline{J}_s$  и  $\underline{J}_m$  получены в виде несобственных интегралов [1]

$$\begin{aligned} \underline{J}_s &= P_s + jQ_s = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{j e^{-2h_s \lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_0\sigma_g}} d\lambda, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{J}_m &= P_m + jQ_m = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{j e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_0\sigma_g}} \cos(d_{ij}\lambda) d\lambda, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $h_j$  – высота проводника  $j$  над поверхностью земли,  $\sigma_g$  – проводимость земли.

Для расчетов по (5), (6) в литературе предложены аппроксимирующие выражения для несобственных интегралов в виде бесконечных сходящихся рядов

$$R_g = 4\omega 10^{-7} \left\{ \frac{\pi}{8} - b_1 k + b_2 (C_2 - \ln k) k^2 + b_3 k^3 - d_4 k^4 - \dots \right\},$$

$$X_g = 4\omega 10^{-7} \left\{ \frac{1}{2} (0,615315 - \ln k) + b_1 k - d_2 k^2 + b_3 k^3 - b_4 (C_4 - \ln k) k^4 + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned} R_{gm} &= 4\omega 10^{-7} \left\{ \frac{\pi}{8} - b_1 k_m \cos \theta + \right. \\ & b_2 [(C_2 - \ln k_m) k_m^2 \cos 2\theta] + \theta k_m^2 \sin 2\theta + \\ & \left. + b_3 k_m^3 \cos 3\theta - d_4 k_m^4 \cos 4\theta - \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{gm} &= 4\omega 10^{-7} \left\{ \frac{1}{2} (0,615315 - \ln k_m) \right. \\ & + b_1 k_m \cos \theta - d_2 k_m^2 \cos 2\theta + b_3 k_m^3 \cos 3\theta \\ & \left. - b_4 [(C_4 - \ln k_m) k_m^4 \cos 4\theta + \theta k_m^4 \sin 4\theta] + \dots \right\} \end{aligned}$$

где  $b_i$ ,  $C_i$ ,  $d_i$  – коэффициенты, определяемые выражениями

$$b_i = b_{i-2} \frac{\text{sign}}{i(i+2)},$$

$$C_i = C_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2},$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i$$

$$k = 4\pi\sqrt{510^{-4}} 2h_i \sqrt{f\sigma_g}$$

$$k_m = 4\pi\sqrt{510^{-4}} D_{ij} \sqrt{f\sigma_g}$$

$$\theta_i = \arcsin \left( \frac{d_{ij}}{D_{ij}} \right)$$

Бесконечный ряд для вычисления  $\underline{Z}_{Gii}$  и  $\underline{Z}_{Gij}$  согласно выражениям, полученным Карсоном [1], сходится достаточно быстро при низких частотах. При увеличении частоты сходимость ряда существенно ухудшается и, соответственно, увеличивается количество членов ряда, необходимых для достижения достаточной точности расчета.

Выражения для собственной и взаимной индуктивности линий, обусловленных электрическим влиянием земли, получены в [2] в виде

$$\underline{L}_e = \left[ 1 + 2 \ln \frac{10^4}{\gamma R \sqrt{10\pi\omega\sigma_g}} - j \frac{\pi}{2} - j \frac{16h_i 10^{-4}}{3} \sqrt{10\pi\omega\sigma_g} \right] 10^{-4}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_{ij}(\omega) &= \left[ 1 + 2 \ln \frac{10^4}{\gamma (d_{ij} - r) \sqrt{10\pi\sigma_g \omega}} - \right. \\ & \left. - j \frac{\pi}{2} - j \frac{16(h_i + h_j) 10^{-4}}{3} \sqrt{10\pi\omega\sigma_g} \right] 10^{-4}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $\gamma = 1,7811$  – постоянная Эйлера.

В [4, 5] на основе обобщения результатов предложена более точное выражение для импеданса проводников, проходящих над поверхностью земли, в диапазоне высоких частот (формула Вайса-Занде)

$$\underline{Z}_{Gij} = \frac{j\omega\mu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{j e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \gamma_g^2}} \cos(d_{ij}\lambda) d\lambda, \quad (10)$$

где  $\gamma_g$  – константа распространения электромагнитной волны в земле, определяемая выражением

$$\gamma_g = \sqrt{j\omega\mu_0(\sigma_g + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_g)}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная,  $\varepsilon_g$  - относительная диэлектрическая проницаемость земли.

Из (10) видно, что для частот ниже критической ( $f \ll f_{cr}$ ), выражение (9) после пренебрежения малыми членами преобразуются в формулу, полученную в [1].

В [7, 8] предложены формулы для собственного и взаимного импеданса проводников, расположенных над поверхностью земли, в предположении, что ток в земле сосредоточен в поверхностном слое толщиной  $P$  с конечным значением проводимости

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2(h_i + p)}{r_i}, \quad (12)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(h_i + h_j + 2p)^2 + d_{ij}}}{\sqrt{(h_i - h_j)^2 + d_{ij}}} =$$

$$= j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}''}{D_{ij}}$$

где  $D_{ij}$  – расстояния между проводниками  $i$  и  $j$ ,  $D_{ij}'$  - расстояния между проводником  $i$  и его отображением  $j'$ ,  $p$  – поверхностный слой земли, в котором сосредоточен ток, индуцированный переменным электрическим полем (рис. 1). Отображение проводника располагается на глубине  $2(h + p)$ . Толщину поверхностного слоя  $p$  условно рассматривают как комплексную величину.

### Результаты

Для сравнительного анализа результатов расчета импеданса рельсовых линий и контактного провода по формулам, приведенным в [1-8] использованы экспериментальные данные для частот 50, 100, 150 Гц [9-11]. Результаты работы [11] отличаются от данных [9-11], что возможно связано с конструктивными особенностями верхнего строения железнодорожного пути, а также отличиями в проводимости земли.

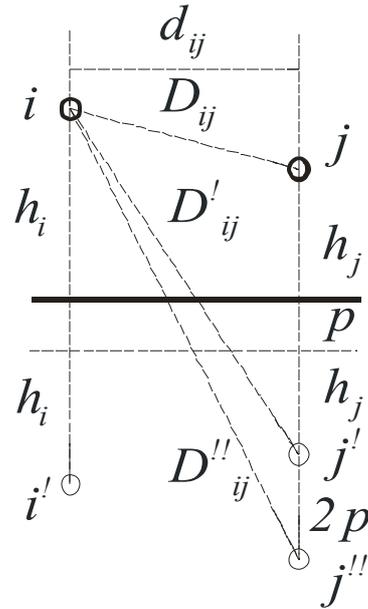


Рис. 1. Схематическое изображение проводников  $i, j$  и их зеркальных отображений.

Таблица 1  
Взаимный импеданс между рельсами  
(Ом/км)

f, Гц	Эксперимент			Расчеты по формулам		
	[9]	данная работа	[1]	[2]	[4-6]	[7,8]
50	0,34	-	0,32	0,31	0,31	0,14
100	0,62	-	0,59	0,59	0,57	0,24
1000	-	4,31	4,47	4,47	4,33	1,28
5000	-	16,4	17,56	17,53	16,9 2	-

Для проведения сравнительного анализа расчетных формул, в работе проведены измерения взаимного импеданса между контактным проводом и рельсовой линией для частот 50, 100, 1000, 5000 Гц. Результаты измерений взаимного импеданса между рельсовой линией и контактным проводом для рельсовой линии на железобетонных шпалах при удельной проводимости земли  $6 \cdot 10^{-3}$  Ом·м, совместно с литературными данными и результатами расчетов приведены в табл. 1.

Из таблицы видно удовлетворительное соответствие расчетов по формулам [1-6] с экспериментальными данными. Наилучшее совпадение наблюдалось для расчетов по формулам, полученным в [4-6], что согласуется с литературными данными. Значительное отличие результатов расчетов наблюдалось для формул [7, 8], что можно объяснить небольшим расстоянием между рельсами и поверхностью земли. Это приводит к заниженной оценке поверхностного слоя земли  $\rho$ , в котором сосредоточен индуцированный ток. Такое расхождение наблюдалось как на низких, так и на высоких частотах.

На рис. 2, 3 приведены результаты расчета взаимного импеданса рельсовых нитей, а также рельсовой линии и контактного провода по формулам, приведенным в литературе [1-8], для двух значений удельной проводимости земли:  $5 \cdot 10^{-3}$  Ом·м и  $5 \cdot 10^{-2}$  Ом·м.

Как видно взаимный импеданс между рельсовыми нитями, а также рельсовой линией и контактным проводом увеличивается с частотой, что соответствует литературным данным [9, 10]. Уменьшение взаимного импеданса при увеличении про-

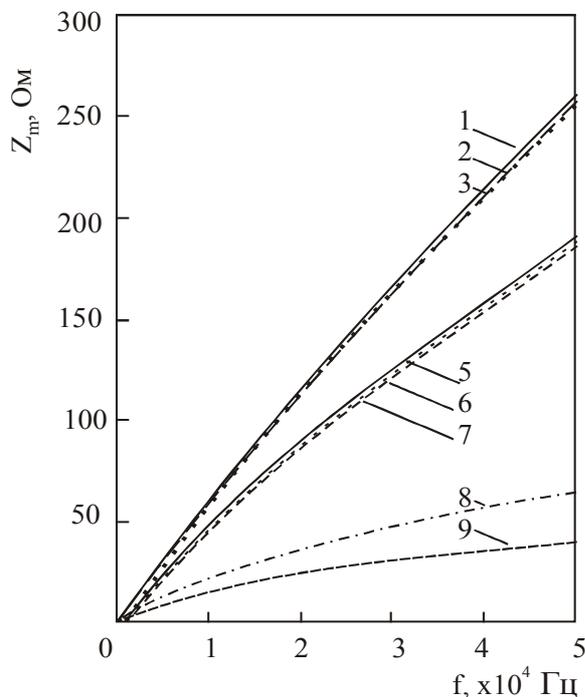


Рис. 2. Частотные зависимости взаимного импеданса двух рельсовых нитей, рассчитанные по формулам [4-6] (1, 5); [1] (2, 6); [2] (3, 7); [7, 8]

(8, 9) для удельной проводимости земли  $5 \cdot 10^{-3}$  Ом·м (1-3, 8),  $5 \cdot 10^{-2}$  Ом·м (5-7, 9)

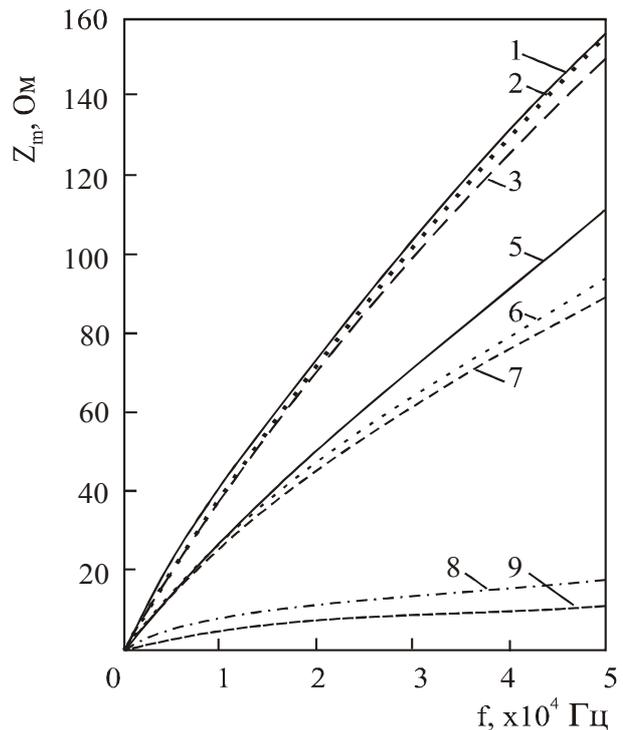


Рис. 3. Частотные зависимости взаимного импеданса рельсовой линии и контактного провода, рассчитанные по формулам [2] (1, 5); [1] (2, 6); [4-6] (3, 7); [7, 8] (8, 9) для удельной проводимости земли  $5 \cdot 10^{-3}$  Ом·м (1-3, 8),  $5 \cdot 10^{-2}$  Ом·м (5-7, 9)

водимости земли можно объяснить экранирующим влиянием земли. Расчеты по формулам, полученным в работах [1-6], удовлетворительно согласуются между собой, в то время как расчеты по формулам [7, 8] значительно отличаются. При увеличении частоты различие между результатами расчетов, полученных различными методами, увеличивается.

Особенно существенное расхождение между результатами расчетов взаимного импеданса по различным формулам наблюдалось для системы «рельсовая линия– контактный провод». Это расхождение увеличивалось при увеличении проводимости земли (рис. 3).

### Выводы

Проведенный сравнительный анализ результатов расчетов частотной зависимости импеданса рельсовых нитей, рельсовых ли-

ний и контактного провода показал, что в диапазоне низких частот до ~100...200 Гц приемлемую для инженерных расчетов точность обеспечивают расчеты по формулам Карсона [1], Поллачека [2], Вайса-Занде [4-6]. Расчеты с применением выражений, основанных на использовании комплексной толщины поверхностного слоя земли [7, 8] для рассматриваемых систем давали значительную погрешность как на низких, так и на высоких частотах. Погрешность расчетов для всех методов увеличивалась с увеличением частоты и проводимости земли. В диапазоне тональных частот приемлемую для практики точность обеспечивали расчеты по формулам Вайса-Занде [4-6].

#### Библиографический список

1. Carson, J. R. Wave propagation in overhead wires with ground return // Bell. Syst. Tech. J. 1926. No 5. P. 539-544.
2. Pollaczek, F. On the field produced by an infinitely long wire carrying alternating current // Elektrische Nachrichten Technik, 1926. Vol. III. No. 9. P. 339-359.
3. Wise, W.H. Effect of ground permeability on ground return circuits // Bell. Syst. Tech. J. 1931. No10. P. 472-484.
4. Wise, W.H. Propagation of high frequency currents in ground return circuits // Proc.Inst. Radio Engrs., 1934. No 22. P. 522-527.
5. Sunde, E.D. Earth conduction effects in transmission systems, 2nd ed. Dover Publications, 1968. P. 99-139.
6. Rachidi, F., Nucci, C.A., Ianoz, M. Transient analysis of multiconductor lines above a lossy ground // IEEE Trans. Power. Delivery, 1999. Vol 14. No 1. P. 294-302.
7. Gary C. Approche complete de la propagation multifilaire en haute frequence par l'utilisation des matrices complexe // EDF Bull. de la direction des etudes et recherches. Serie B, 1976. No 3/4. P. 5-20.
8. Deri A., Tevan G., Semlyen A., Castanheira A. The complex ground return plane. A simplified model for homogenous and multilayer earth return // IEEE Trans. On Power Systems, 1981. Vol 100. Nr. 8. P. 3686-3693.
9. Марквардт, К. Г. Электроснабжение электрифицированных железных дорог - 4-е изд., перераб. и дополн [Текст]: учебник для вузов ж.-д. трансп. К. Г. Марквардт. - М.: Транспорт, 1982. - 528 с.
10. Бадер, М. П. Электромагнитная совместимость. [Текст] / М. П. Бадер. - М.: УМК МПС. - 2002. - 638 с.
11. Hill R.J., Carpenter D.C., Mellitt B., Allan J., Brown J.C. Calculation and measurement of rail impedances applicable to remoteshort-circuit fault currents // Electric Power Applications. IEE Proceedings. B. 1993. Vol 140. Issue 6. P. 417 - 420.

**Ключові слова:** імпеданс, рейкова лінія, контактний провід, аналіз.

**Ключевые слова:** импеданс, рельсовая цепь, контактний провід, аналіз.

**Key words:** impedance, railway line, catenary wire, analysis.

Поступила в редколлегию 11.11.2010.

Принята к печати 15.11.2010.