ISSN 2223–5620 (Print), ISSN 2411–1554 (Online)
Електромагнітна сумісність та
безпека на залізничному транспорті, 2014, № 8

УДК 517.518.2

Л. А. ПАНИК – ст. преподаватель, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, leon-docent@mail.ru

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТОКОВЫХ ЗАДАЧ С НЕОДНОРОДНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Статья рекомендована к публикации д. физ.-мат. н., проф. В. І. Гаврилюком (Украина), проф., д. т. н. В. Е. Белозеров (Украина)

Введение

При изучении характеристик транспортных и других сетей возникает необходимость вычисления оптимальных значений функции потока, протекающего от некоторого источника к стоку [1, 2, 3]. Статья посвящена проблемам анализа и оптимального планирования потоков в сетях, когда отдельные единицы потока (носители, транспортные средства) различаются своими свойствами. В качестве свойств носителей потока может быть следующее: 1) перемещение носителей по некоторым известным маршрутам, траекториям; 2) ограничения на возможность совместного движения единиц потока различных типов по дугам; 3) определенные последовательности движения носителей; 4) неоднородность единиц потока по «праву собственности», что приводит к необходимости учета индивидуальных оценок цели и допустимых перемещений носителей. Известные математические модели задач планирования и управления на основе анализа потоков лишь частично учитывают такие требования. В настоящее время управление потоками с учетом специализации свойств отдельных элементов потоков становится одной из актуальных проблем. В статье выполнен сравнительный анализ основных моделей потоковых задач и показано, что новый класс математических моделей, учитывающих специфические свойства отдельных перемещаемых элементов, является непосредственным обобщением классических моделей.

Модели задач и потоков в сетях, однородные и неоднородные потоки

Рассмотрим модель задачи о максимальном потоке в сети. Пусть $G=(N,A)$ – ориентированная сеть, где N – множество узлов, A – множество дуг, а U_{ij} – пропускная способность дуги (i,j). Считаем, что узел s является источником, а узел t – стоком. Согласно [2], целочисленная функция f_{ij}, определенная на множестве A, называется потоком в сети G, если она удовлетворяет ограничениям:

$$\begin{cases} f_{ij}\ge 0 \quad \forall \quad (i,j)\in A, \\ \sum\limits_{j\in\alpha_i} f_{ij}-\sum\limits_{j\in\beta_i} f_{ji}=0 \quad \forall i\in N, i\ne s, i\ne t \\ f_{ij}\ge U_{ij} \quad \forall \quad (i,j)\in A. \end{cases} \qquad (1)$$

В (1) β_i – множество всех узлов, связанных с узлом i дугами, направленными к i, α_i – множество всех узлов, связанных с i – дугами, направленными в противоположную сторону. Значение $\sum\limits_j f_{sj}=\sum\limits_j f_{jt}=V$ называется величиной потока.

В задаче о максимальном потоке требуется найти максимально допустимую величину V, на основе следующего:

$$\max V \qquad (2)$$

при условии, что

$$\sum_j f_{ij}-\sum_j f_{ji}=\begin{cases} V, & i=s, \\ 0, & i\ne s, i\ne t, \\ -V, & i=t. \end{cases} \qquad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) суммирование производится по всем узлам, для которых функция f_{ij} определена.

Максимальный поток характеризует пропускную способность сети в целом для стационарного режима. При этом в классической модели [4] отдельные носители единиц потока не рассматриваются. Следовательно, не рассматриваются и траектории носителей потока от s к t. Такое представление соответствует предположению об однородности носителей, отсутствии у них каких–либо индивидуальных свойств. В [4, 5] сформулированы новые задачи исследования потоков для случаев, когда вводится в модель дифференциация носителей потока.

В представленной статье, продолжая [4, 5], выполнен анализ потоков, когда единицы потока имеют индивидуальные свойства. Такими их свойствами (неоднородностями носителей потока) могут быть: перемещение по известным маршрутам, ограничения на возможность совместного движения по дугам, задание определенной последовательности движения носителей, право собственности, то есть индивидуальные оценки качества и цели перемещения носителей, и др.

С учетом индивидуальных свойств единиц потока будем рассматривать три задачи:

1. Для известного потока на входе сети (известно общее число единиц потока поступающее в сеть за некоторый период) и для максимального потока необходимо определить множество возможных траектории, по которым могут передвигаться отдельные единицы потока.
2. Для объектов с заданным набором индивидуальных свойств необходимо определить максимальный поток в сети.
3. На множестве оптимальных траекторий рассчитать компромиссные варианты движения единиц потока с учетом выбранной системы оценок.

Рассмотрим первую из задач. Пусть t_i – количество единиц потока с i–м индивидуальным свойством, где $i=\overline{1,m}$. Тогда задача о траекториях максимального потока имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = V \tag{4}$$

при условии, что:

$$\sum_{j}\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{k} - \sum_{j}\sum_{k=1}^{m} f_{ji}^{k} = \\ = \begin{cases} V, & i=s, \\ 0, & i\neq s, i\neq t, k=\overline{1,m} \\ -V, & i=t. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь V – величина потока. Отличие задачи (4)–(5) от задачи (1)–(3) заключается в наличии двойной суммы (внутренняя сумма берется по величинам потока с k–м индивидуальным свойством). Задача (4)–(5) будет иметь решение, если выполняется соотношение:

$$0 \le \sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{k} \le U_{ij}\text{, здесь } f_{ij}^{k} \le t_k, \tag{6}$$

где U_{ij} – пропускная способность дуги (i, j) сети, f_{ij}^{k} – величина потока с k–м индивидуальным свойством по дуге (i, j), $k=\overline{1,m}$. Задача (4)–(5) не имеет решения если существуют дуги (i, j) на которых выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} f_{ij}^{k} > U_{ij}\,. \tag{7}$$

Для решение задачи (4)–(5) требуется также указать возможные траектории перемещения единиц потока по сети, общее число которых известно (максимально). Если ограничение (7) будет выполняться, то за некоторый период времени через сеть проходит меньше единиц потока, чем согласно (4).

Зная для некоторой дуги, число единиц потока протекающего по ней, выделяем возможные маршруты для каждой единицы потока на основе матричного метода представленного в работе [4, с. 62].

Во второй задаче надо найти максимальный поток в сети, в зависимости от пропускных способностей дуг при дополнительных ограничениях, обусловленных индивидуальными свойствами носителей.

Многопродуктовые и многокритериальные модели задач о потоках в сетях

Характерная особенность задач о многопродуктовом потоке состоит в том, что по дугам сети протекает, не один, а несколько неоднородных потоков, соответствующих процессам транспортировки различных продуктов. При этом суммарная величина потоков всех продуктов, перемещаемых по дугам, ограничена их пропускной способностью.

Задачи о многопродуктовом потоке так же могут быть сформулированы как задачи линейного программирования [2]. Пусть x_{ij}^k– поток k-ого продукта из i-ого источника в j-й сток, а c_{ij}^k - стоимость транспортировки единицы этого продукта. далее пусть a_i^k и b_j^k - это предложение узла i и спрос узла j для k-ого продукта, соответственно, обозначим u_{ij} - пропускная способность дуги (i, j). Тогда постановка многопродуктовой транспортной задачи имеет вид:

$$\min \sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}^k \qquad (8)$$

при условии, что

$$\sum_i x_{ij}^k = b_j^k \text{ для всех } j, k, \qquad (9)$$

$$\sum_j x_{ij}^k = a_i^k \text{ для всех } i, k, \qquad (10)$$

$$\sum_k x_{ij}^k \le u_{ij} \text{ для всех } i, j, \qquad (11)$$

$$x_{ij}^k \ge 0 \text{ для всех } i, j, k. \qquad (12)$$

Здесь, как и в однопродуктовой модели, предполагается, что для каждого продукта суммарное предложение равно суммарному спросу, т.е.

$$\sum_i a_i^k = \sum_j b_j^k \text{ для всех } k. \qquad (13)$$

В многопродуктовых задачами о перевозках вводятся промежуточные узлы [1, 3], которым не приписывается ни предложение, ни спрос, но требуется выполнение условия сохранения потока. Многопродуктовые задачи о перевозках могут быть представлены следующей моделью задач линейного программирования:

$$\min \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij}^k, \qquad (14)$$

причем

1) если узел i является источником продукта k, то

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = a_i^k, \qquad (15)$$

2) если узел i является промежуточным узлом, то

$$\sum_j x_{ij}^k - \sum_j x_{ji}^k = 0, \qquad (16)$$

3) если узел j является стоком продукта k, то

$$\sum_i x_{ij}^k - \sum_i x_{ji}^k = -b_j^k, \qquad (17)$$

также должны выполняться ограничения: вида

$$\sum_k x_{ij}^k \le u_{ij} \text{ для всех } (i, j) \in A, \qquad (18)$$

$$x_{ij}^k \ge 0 \text{ для всех } k \text{ и } (i, j) \in A \qquad (19)$$

Для многопродуктовой задачи можно независимо для каждого продукта решить соответствующую транспортную задачу, используя, например, алгоритм дефекта [1].

Модели потоковых задач (8) – (13) и (14) – (19) формируют оптимальные планы транспортировки на основе спросов и предложений узлов, по сути, не рассматривая процесс транспортировки, носителей потоков, неявно предполагая их однородность, эквивалентность. Легко установить, что многопродуктовые задачи являются частным случаем задач о потоках со специализацией носителей, когда единица потока (исполнитель транспортировки) могут различаться, иметь индивидуальные свойства [6, 7]. В качестве этих свойств, в частности, могут быть: перемещение по известным маршрутам (в классических моделях не рассматривается), ограничения на возможность совместного движения по дугам, задание определенной последовательности продвижения носителей, право собственности. Последнее из них задает набор индивидуальных оценок качества и цели перемещения носителей. Одной из отличительных особенностей потоковых задач со специализацией носителей является необходимость формирования набора траекторий движения единиц потока. В этом множестве и разыскиваются решение этих задач.

Заметим, что многопродуктовая задача является частным случаем потоковой задачи с индивидуальными свойствами, Таким индивидуальным свойством выступает качество – «быть продуктом типа P». Необходимо указать, что математическая формулировка многопродуктовой задачи (8) – (13) (и ее обобщения (14) – (19)) фактически является одной из моделей компромисса многокритериальных задач оптимального планирования. А именно, если в качестве обобщенной скалярной функции (8) или (14) выступает аддитивная, причем каждый частный критерий $P_k = \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij}^k$ - равноценен, имеет один и тот же весовой коэффициент, например, единица. Разумеется, компромиссная модель содержит все ограничениями в совокупности, а также включает дополнительные ограничения на общую пропускную способность. Простейшим обобщением многопродуктовой постановки, выполненной с позиций учета специализации свойств носителей потока, «право собственности», является модель типа (8) – (13), в которой частные критерии неравноценны γk<>γj. ∑γk=1. Разумеется, что вместо аддитивной модели скаляризации, как (8) и (14), можно использовать любые другие модели компромиссов [8, 9]; например, функцию максимума.

Чтобы продолжить сравнение моделей многопродуктовых задача о потоках в сетях с моделями задач с индивидуальными свойствами, при специализации носителей потоков, подробней рассмотрим такое свойство, как «право собственности». Для наглядности считаем, что каждый продукт принадлежит отдельному собственнику, характеризуется своей функцией цели. То есть в задачу типа (8) – (19) первоначально вводится вектор частных целей, отдельных для каждого собственника. Для решения такой теперь уже многокритериальной задачи могут быть использованы различные модели и методы, в том числе и скаляризация, в частности, приводящая к критерию (8). Кроме того при таком рассмотрении задачи как многокритериальной, предполагающей формирование компромисса, естественно может быть расширена система ограничений, подобных (11), (18). На допустимую область решения могут быть наложены новые, дополнительные требования. Например:

$$x_{ij}^k \le u_{ij}^k,\ k = \overline{1,m}, \tag{20}$$

хотя

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ij}^k \le u_{ij} \text{ для всех } (i,j) \in A, \tag{21}$$

где m - количество различных продуктов.

В настоящее время известен ряд алгоритмов для решения многопродуктовых потоковых задач (алгоритм Ху, метод «агрегирования» и др. [2]). Эти методы прямо не могут быть использованы для потоковых задач со специализацией носителей, при задании для них индивидуальных свойств. Они непосредственно не учитывают дополнительные ограничения типа (20) и др., а также возникающую при определенных условиях многокритериальность, а значит и качественно новый аспект проблемы – компромиссный характер функции цели и решения в целом.

Выводы

Показано, что в потоковых задачах с учетом индивидуальных свойств носителей существенно не только значение потока, но и траектории описываемые единицами потока. С учетом характеристик элементов потока на различных траекториях, выделен класс новых компромиссных задач о потоках в сетях. Также в работе получено обобщение многопродуктовых и многокритериальных моделей оптимизационных задач о потоках в сетях, прежде всего – транспортных. Отличие предлагаемых обобщенных моделей состоит в учете специализации единиц потоков, носителей, как новых компонентов задач о потоках в сетях.

Библиографический список

1. Форд, Л. Р. Потоки в сетях [Текст] / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. - М.: Мир. 1966. – 276 с.
2. Филлипс, Д. И. Методы анализа сетей [Текст] / Д. И. Филлипс, А. Гарсиа–Диас. – М.: Мир, 1984. – 496 с.
3. Басакер, Р. Введение в теорию исследования операций [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. Москва. Наука. 1974. – 366 с.
4. Нечипуренко, В. И. Структурный анализ систем [Текст] / В. И. Нечипуренко – М.: «Советское радио». 1977. – С. 212.
5. Гермеер, Ю. Б. Введение в теорию исследования операций [Текст] / Ю. Б. Гермеер - Москва. Наука. 1976. – С. 352.
6. Скалозуб, В. В. Моделирование и анализ потоковых задач с неоднородными носителями [Текст] / В. В. Скалозуб, Л. А. Паник // Вісник Дніпропетровського національного університета залізничного транспорту. – 2009. – №19. – С. 76 – 83.
7. Скалозуб, В. В. Многокритериальные модели задачи анализа транспортных сетей с учетом специализированных свойств носителей потоков [Текст] / В. В. Скалозуб, Л. А. Паник. Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2010. - №4. – С 15-21.
8. Дилигенский, Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология [Текст] / Н. В. Дилигенский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов. – М.: «Издательство Машиностроение». 2004. – 278 с.
9. Ehrgott, M. Multicriteria optimization [Текст] / M. Ehrgott. – Springer, 2005. – 328 p.

Ключові слова: транспортні потоки, транспортні мережі, моделювання, багатопродуктові моделі, багатокритеріальні моделі.

Ключевые слова: транспортные потоки, транспортные сети, моделирование, многопродуктовые модели, многокритериальные модели.

Keywords: traffic flows, transportation networks, modeling, multi-product models, multi-criteria model.

Поступила в редколлегию 25.04.2014
Принята к печати 14.10.2014